

<http://www.triptyxo.edu.gr> - email: triptyxo@gmail.com

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025

ΘΕΜΑ Α

- Α1) Θεωρήστε με αποδίδει πες. 186 σχολικό βιβλίο
Α2) Θεωρήστε διαγωνισμό πες 76 σχολικό βιβλίο
Α3) Ορίστος πες 161 σχολικό βιβλίο
Α4) α) 2, β) 2, γ) 1, δ) 1, ε) 2

ΘΕΜΑ Β

Β1) Έχουμε:

- Η f παραγωγική στο $x_0=1$
- Το f να είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$
- Η f να παρουσιάζει ΤΑ στο $x_0=1$

Αρα από Θ. Fermat: $f'(1)=0$. ①

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$ άρα $f'(x) = 12 + 2\alpha$

οπότε από ① $\Rightarrow 12 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -6$

Β2) Για $\alpha = -6$ έχουμε: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, $x \in \mathbb{R}$

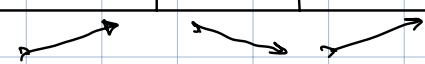
Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3 \cdot (x^2 - 4x + 3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 3$$

Αρα:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$				

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1$$

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Εντά:

- $A_1 = (-\infty, 1)$ και η $f \uparrow$ στο A_1 , άρα

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) \xrightarrow{f \text{ συνεχής στο } 1} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right) = (-\infty, 1).$$
- $A_2 = [1, 3]$ και η $f \downarrow$ στο A_2 , άρα:

$$f(A_2) = [f(3), f(1)] = [-3, 1]$$
- $A_3 = (3, +\infty)$ και η $f \uparrow$ στο A_3 , άρα:

$$f(A_3) = \left(\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \xrightarrow{f \text{ συνεχής στο } 3} (f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-3, +\infty).$$

Παρατηρούμε ότι: $0 \in f(A_1)$, $0 \in f(A_2)$, $0 \in f(A_3)$

άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες p_1, p_2, p_3
 $p_1 \in A_1$, $p_2 \in A_2$, $p_3 \in A_3$

Προφανώς $p_2 > 0$ και $p_3 > 0$.

Για την p_1 :

Εκτιμή

η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -3 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$$

από Θ. Βολζανο για την f στο $[0, 1]$: $p_1 \in (0, 1)$ άρα $p_1 > 0$.

(B3) Έχουμε:

$$f'(x) = 6x - 12, x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 12 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Άρα:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ για } x \in (-\infty, 2) \\ \text{η } f \text{ συνεχής στο } 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f \searrow \text{ στο } (-\infty, 2].$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ για } x \in (2, +\infty) \\ \text{η } f \text{ συνεχής στο } 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f \nearrow \text{ στο } [2, +\infty)$$

• $f'(x) < 0$ για $x \in (-\infty, 2)$ και $f'(x) > 0$ για $x \in (2, +\infty)$
 η f παραγόμενη στο 2 άρα ορίζεται ελάχιστη της f στο $\mathbb{N}(2, f(2))$,
 οπότε $\mathbb{N}(2, -1)$ ωάι ριζήλο κάπως

84) 1^{ος} τρόπος

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση:

$$(ε): y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi) \quad \text{ή}$$

$$(ε): y = f'(\xi) \cdot x + f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

Για $x=0$ έχουμε $y = f(\xi) - \xi f'(\xi)$ άρα

η $(ε)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, f(\xi) - \xi f'(\xi))$.

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$ έχει εξίσωση:

$$(η): y - g(\xi) = g'(\xi) (x - \xi) \quad \text{όπου}$$

$$g(\xi) = \xi + f(\xi) \quad \text{και} \quad g'(\xi) = 1 + f'(\xi) \quad \text{άρα}$$

$$(η): y - (\xi + f(\xi)) = (1 + f'(\xi)) \cdot (x - \xi) \quad \text{ή}$$

$$(η): y = (1 + f'(\xi)) \cdot x - \xi - \xi f'(\xi) + \xi + f(\xi) \quad \text{ή}$$

$$(η): y = (1 + f'(\xi)) \cdot x + f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

Για $x=0$ έχουμε $y = f(\xi) - \xi f'(\xi)$ άρα

η $(η)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, f(\xi) - \xi f'(\xi))$

Οποτε οι $(ε), (η)$ τέμνουν τον άξονα $y'y$ στο ίδιο σημείο
 άρα **τεμνούνται πάνω στον άξονα $y'y$.**

2^{ος} τρόπος

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση:

$$(ε): y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi) \quad \text{ή}$$

$$(ε): y - (\xi^3 - 6\xi^2 + 9\xi - 3) = (3\xi^2 - 12\xi + 9) (x - \xi) \quad \text{ή}$$

$$(ε): y = (3\xi^2 - 12\xi + 9) \cdot x - 3\xi^3 + 12\xi^2 - 9\xi + \xi^3 - 6\xi^2 + 9\xi - 3 \quad \text{ή}$$

$$(ε): y = (3\xi^2 - 12\xi + 9) \cdot x - 2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$$

Για $x=0$ έχουμε $y = -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$ άρα

η $(ε)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3)$.

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$ έχει εξίσωση:

$$(η): y - g(\xi) = g'(\xi) (x - \xi) \quad \text{όπου}$$

$$(η): y - (\xi + \xi^3 - 6\xi^2 + 9\xi - 3) = (1 + 3\xi^2 - 12\xi + 9) \cdot (x - \xi) \quad \text{ή}$$

$$(η): y = (1 + 3\xi^2 - 12\xi + 9) \cdot x - \xi - 3\xi^3 + 12\xi^2 - 9\xi + \xi + \xi^3 - 6\xi^2 + 9\xi - 3 \quad \text{ή}$$

$$(η): y = (1 + 3\xi^2 - 12\xi + 9) \cdot x - 2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$$

Για $x=0$ έχουμε $y = -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$ άρα

η $(η)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3)$

Οποτε οι $(ε), (η)$ τέμνουν τον άξονα $y'y$ στο ίδιο σημείο
 άρα **τεμνούνται πάνω στον άξονα $y'y$.**

3^{ος} τρόπος

Η ερακτομένη ως C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση:

$$(ε): y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi) \quad \text{ή}$$

$$(ε): y = f'(\xi) \cdot x + f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

Η ερακτομένη ως C_g στο $B(\xi, g(\xi))$ έχει εξίσωση:

$$(η): y - g(\xi) = g'(\xi) (x - \xi) \quad \text{όπου}$$

$$g(\xi) = \xi + f(\xi) \quad \text{και} \quad g'(\xi) = 1 + f'(\xi) \quad \text{αρα}$$

$$(η): y - (\xi + f(\xi)) = (1 + f'(\xi)) \cdot (x - \xi) \quad \text{ή}$$

$$(η): y = (1 + f'(\xi)) \cdot x - \xi - \xi f'(\xi) + \xi + f(\xi) \quad \text{ή}$$

$$(η): y = (1 + f'(\xi)) \cdot x + f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi)$$

Λύνουμε το $(ξ)$ των ενθίων $(ε)$ και $(η)$:

$$\begin{cases} y = f'(\xi) \cdot x + f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi) & ① \\ y = (1 + f'(\xi)) \cdot x + f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi) & ② \end{cases}$$

$$\text{Απο } ② - ① \text{ έχουμε: } 0 = (1 + f'(\xi))x - f'(\xi) \cdot x \Leftrightarrow x = 0$$

Οποτε οι $(ε), (η)$ τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

4^{ος} τρόπος

Η ερακτομένη ως C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση:

$$(ε): y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi) \quad \text{ή}$$

$$(ε): y - (\xi^3 - 6\xi^2 + 9\xi - 3) = (3\xi^2 - 12\xi + 9) (x - \xi) \quad \text{ή}$$

$$(ε): y = (3\xi^2 - 12\xi + 9) \cdot x - 3\xi^3 + 12\xi^2 - 9\xi + \xi^3 - 6\xi^2 + 9\xi - 3 \quad \text{ή}$$

$$(ε): y = (3\xi^2 - 12\xi + 9) \cdot x - 2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$$

Η ερακτομένη ως C_g στο $B(\xi, g(\xi))$ έχει εξίσωση:

$$(η): y - g(\xi) = g'(\xi) (x - \xi) \quad \text{όπου}$$

$$(η): y - (\xi + \xi^3 - 6\xi^2 + 9\xi - 3) = (1 + 3\xi^2 - 12\xi + 9) \cdot (x - \xi) \quad \text{ή}$$

$$(η): y = (1 + 3\xi^2 - 12\xi + 9) \cdot x - \xi - 3\xi^3 + 12\xi^2 - 9\xi + \xi + \xi^3 - 6\xi^2 + 9\xi - 3 \quad \text{ή}$$

$$(η): y = (1 + 3\xi^2 - 12\xi + 9) \cdot x - 2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$$

Λύνουμε το $(ξ)$ των ενθίων $(ε)$ και $(η)$:

$$\begin{cases} y = (3\xi^2 - 12\xi + 9) \cdot x - 2\xi^3 + 6\xi^2 - 3 & ① \\ y = (1 + 3\xi^2 - 12\xi + 9) \cdot x - 2\xi^3 + 6\xi^2 - 3 & ② \end{cases}$$

Απο $② - ①$ έχουμε:

$$0 = (1 + 3\xi^2 - 12\xi + 9) \cdot x - (\xi^2 - 12\xi + 9) \cdot x \Leftrightarrow x = 0$$

Οποτε οι $(ε), (η)$ τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

(Γ1) Έκουμε:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \sqrt{0^2+0} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \cdot \eta f x) = 1 \cdot 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2+x}) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Άρα $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, άρα f συνεχής στο 0.

1^{ος} τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x^2+x})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x+1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \right) = \frac{1}{2} \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ αφού } \sqrt{x^2+x} > 0 \text{ σε } x \rightarrow 0^+.$$

οπότε ανεξαρτήτως του $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \notin \mathbb{R}$

άρα f δεν έχει παράγωγο στο 0.

2^{ος} τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cdot \eta f x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \cdot \frac{\eta f x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x^2+x})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x+1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \right) = \frac{1}{2} \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ αφού } \sqrt{x^2+x} > 0 \text{ σε } x \rightarrow 0^+.$$

οπότε δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

άρα f δεν έχει παράγωγο στο 0.

(Γ2) • Έρευνουμε Αιφνητώρες

Δεν υπάρχει αφού $D_f = \mathbb{R}$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

• Πλάτης - Ορίζοντες Αιφνητώρες

• Στο $-\infty$:

$$\rightarrow \text{θα βρούμε το } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$$

1^{ος} τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \cdot \eta f x}{x}.$$

$$\left| \frac{e^x \cdot \eta f x}{x} \right| = \left| \frac{e^x}{x} \right| = -\frac{e^x}{x} \text{ αφού } x < 0 \text{ δια } x \rightarrow -\infty.$$

Αρα: $\frac{e^x}{x} \leq \frac{e^x \cdot \eta f x}{x} \leq -\frac{e^x}{x}$

με $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e^x}{x}\right) = 0$ αρα απο τεταριο παρεμβαλς $\lambda = 0$.

2ος τροπος

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \cdot \eta f x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x \cdot \eta f x}{x}\right)$, οπου

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και

$\left|\frac{\eta f x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} = -\frac{1}{x}$ αρα $x < 0$ οτιοι $x \rightarrow -\infty$

Αρα

$\frac{1}{x} \leq \frac{\eta f x}{x} \leq -\frac{1}{x}$

με $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ αρα απο τεταριο παρεμβαλς

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta f x}{x} = 0$ και αρα: $\lambda = 0 \cdot 0 = 0$

→ Θα βρούμε το οριο:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta f x = 0$.

Ενωι:

$|e^x \cdot \eta f x| \leq e^x$ αρα $-e^x \leq e^x \cdot \eta f x \leq e^x$ με

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ αρα απο τεταριο παρεμβαλς $b = 0$

Αρα η ευθην $y = 0$ ενωι οριζωνη ασυμπτωτη ως f στο $-\infty$.

• Στο $+\infty$:

→ Θα βρούμε το

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} \stackrel{x \geq 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = 1 = \lambda$.

→ Θα βρούμε το

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} \stackrel{x \geq 0}{=}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2} = \beta$

Αρα η ευθην $y = x + \frac{1}{2}$ ενωι λογιση ασυμπτωτη ως f στο $+\infty$.

Π3 θα δώ:

Η εξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-\pi, 0)$ ή σε

Η εξίσωση $f(x) - x - \frac{1}{2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-\pi, 0)$.

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2} = e^x \cdot \ln x - x - \frac{1}{2}$, $x \in [-\pi, 0]$

• Η g συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} g(-\pi) &= e^{-\pi} \cdot \underbrace{\ln(-\pi)}_0 + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0 \\ g(0) &= e^0 \cdot \underbrace{\ln 0}_0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(-\pi) \cdot g(0) < 0$$

Άρα από Θ. Βολταγκια για την g στο $[-\pi, 0]$ έπεται ότι

Η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x - \frac{1}{2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-\pi, 0)$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

Π4 Έστω $y(t) = f(x(t)) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$ με $x(t) \geq 0$.

Οποτε:

$$y'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \quad (1)$$

Έστω ότι για $t=t_0$ ισχύει $y'(t_0) = x'(t_0)$ τότε

από (1) για $t=t_0$ θα έχουμε:

$$x'(t_0) = \frac{x'(t_0) \cdot (2x(t_0) + 1)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \quad \text{ή (αφού } x'(t_0) > 0)$$

$$1 = \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \quad \text{ή}$$

$$2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2x(t_0) + 1 \quad \text{ή}$$

$$4(x^2(t_0) + x(t_0)) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 \quad \text{ή}$$

$$4x^2(t_0) + 4x(t_0) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 \quad \text{ή}$$

$$0 = 1$$

το οποίο είναι άτοπο

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{e^{\ln^2 x}} = \frac{f(x)}{e^{\ln^2 x}}$, $x > 0$

Η g συνεχής στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^{\ln^2 x} - f(x) (e^{\ln^2 x})'}{(e^{\ln^2 x})^2}$$

$$g'(x) = \frac{f(x) e^{\ln^2 x} - f(x) \cdot e^{\ln^2 x} (\ln^2 x)'}{(e^{\ln^2 x})^2}$$

$$g'(x) = \frac{f(x) - f(x) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{e^{\ln^2 x}} \quad (1)$$

Όπως γνωρίζουμε ότι $x f(x) = 2 f(x) \cdot \ln x$ άρα η (1) γίνεται:

$$g'(x) = \frac{f(x) - x f(x) \frac{1}{x}}{e^{\ln^2 x}}$$

$$g'(x) = 0$$

Άρα $g(x) = C$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Δ2) (1) 1ος τρόπος:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} = l.$$

Για $x=1$ η δεδομένη σχέση δίνει $1 \cdot f(1) = f(1) \cdot \ln 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$.

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 2, \text{ δότα η εφ'αυτοῦ}$$

τὸς $(f$ στὸ σημεῖο $(1, f(1))$ ἀνὰ $\parallel$ πρὸς τὴν ἐνθεῖαν $y=2x$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{(8)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

$$\text{Άρα } l = \frac{2}{1} = 2.$$

2ος τρόπος

Για κάθε $x > 0$ έχουμε $x f(x) = 2 f(x) \cdot \ln x$ ή

$$f(x) = \frac{2 f(x) \cdot \ln x}{x} \text{ άρα η } f \text{ καθ' αὐτὴν στὸ } (0, +\infty)$$

με $f'(x) = \frac{2x(x) \cdot x + 2F(x) - 2F(x) \ln x}{x^2}$, $x > 0$ οπότε

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{(0/0)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot f'(x) = f'(1) = 2$ οπότε

η f' ωδη συνεχής στο $(0, +\infty)$ και

η εφαπτομένη της f στο σημείο $(1, f(1))$ ωδη // προς την ευθεία $y=2x$.

(ii) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ εναι: $x \cdot f(x) = 2F(x) \cdot \ln x$.

Για $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ εναι:

$F(x) = \frac{x f(x)}{2 \ln x}$ ορα:

$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x f(x)}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} \right] \stackrel{(i)}{=} \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$

Οπως η F ωδη συνεχής στο 1 ορα $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 1.$

Τελος

Γνωρίζουμε οα $g(x) = C$, $x > 0$.

Για $x=1$: $g(1) = C \Leftrightarrow \frac{F(1)}{1^0} = C \Leftrightarrow C=1$

Ορα $g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}$, $x > 0$.

(Δ3) Ενω $F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}$ με $x > 0$
 $F'(x) = e^{\ln^2 x} \cdot (2 \ln x \cdot \frac{1}{x}) = \frac{2e^{\ln^2 x}}{x} \cdot \ln x$, $x > 0$

Οπότε

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2e^{\ln^2 x}}{x} \cdot \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$F'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2e^{\ln^2 x}}{x} \cdot \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Ορα

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	$\parallel$	- 0 +	
$F(x)$	$\parallel$	$\nearrow$	$\nearrow$

Έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} F'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1) \\ \text{η } F \text{ συνεχής στο } 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } F \downarrow \text{ στο } (0,1] \text{ και}$$

$$\left. \begin{array}{l} F'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (1,+\infty) \\ \text{η } F \text{ συνεχής στο } 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } F \uparrow \text{ στο } [1,+\infty)$$

Για των εξισωμ: $F(x_2) = F(x) - (x-1)^2, x > 0.$

1^{ος} τρόπος

Παρατηρούμε ότι η $x=1$ είναι μια προφανής δυν.

$$\text{Για } x \in (0,1): x^2 < x \xrightarrow{F \uparrow} F(x^2) > F(x).$$

$$\text{Για } x \in (1,+\infty): x^2 > x \xrightarrow{F \uparrow} F(x^2) > F(x)$$

Άρα για $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ έχουμε:

$$F(x^2) > F(x) \quad ①$$

$$(x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow 0 > -(x-1)^2 \quad ②$$

$$\text{Ανο } ① + ②: F(x^2) > F(x) - (x-1)^2.$$

Άρα η εξισωμ δν έχη δυν στο $(0,1) \cup (1,+\infty)$ άρα έχα μοναδική δυν αν $x=1$

2^{ος} τρόπος

$$\text{Η εξισωμ γράφεται } F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2, x > 0$$

Για $x=1$ ισχύει η ισότητα, άρα έχουμε προφανή δυν.

Για $x \in (0,1)$ έχουμε:

$$\frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} = \frac{-(x-1)^2}{x^2 - x} \quad \text{η}$$

$$\frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} = - \frac{x-1}{x} \quad ①$$

Ανο Θ.Μ.Τ για τω f στο $[x^2, x]$ (αφν $x^2 < x$ για $x \in (0,1)$) έχουμε ότι

$$\exists \xi \in (x^2, x) \subseteq (0,1): F'(\xi) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x}.$$

οπότε η ① γράφεται

$$F'(\xi) = - \frac{x-1}{x}.$$

Όπως αφν $\xi \in (x^2, x) \subseteq (0,1)$ ισχύει $F'(\xi) < 0$. και για κάθε $x \in (0,1)$ άρα $-\frac{x-1}{x} > 0$ άρα η ισότητα δν ισχύει, άρα η εξισωμ δν έχη δυν στο $(0,1)$

Για $x \in (1, +\infty)$ έχουμε:

$$\frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} = \frac{-(x-1)^2}{x^2 - x}$$

$$\frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} = -\frac{x-1}{x} \quad (2)$$

Από Θ.Μ.Τ για τω f στο $[x, x^2]$ (αφού $x^2 > x$ για $x \in (1, +\infty)$), έχουμε ότι

$$\text{Υπάρχει } \xi \in (x, x^2) \subseteq (1, +\infty) : F'(\xi) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x}$$

οπότε η (2) γράφεται

$$F'(\xi) = -\frac{x-1}{x}$$

Οπως αφού $\xi \in (x, x^2) \subseteq (1, +\infty)$ ισχύει $F'(\xi) > 0$, και για κάθε $x \in (1, +\infty)$ άρα $-\frac{x-1}{x} < 0$ άρα

η ισότητα δν ισχύει άρα η ξ (ωμ) δν έχει άνω στο $(1, +\infty)$

Άρα η ξ (ωμ) δν έχει άνω στο $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ άρα έχει μοναδική άνω αν $x=1$

Δ4

Γνωρί

$$E = \int_1^e |F(x)| dx$$

Οπως $F(x) = e^{\ln^2 x} > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα

$$E = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$

Άρα:

$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για

$$\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Οπότε για $x \in [1, e]$ έχουμε ότι η ισότητα δν ισχύει παντού

άρα:

$$\int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \quad \text{ή από (1)}$$

$$E > \int_1^e (x)' \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx$$

$$E > [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e 2x \ln x \frac{1}{x} dx + [x]_1^e$$

$$E > e - 2 \int_1^e (x)' \ln x dx + e - 1$$

$$E > e - 2 \left([x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx \right) + e - 1$$

$$E > e - 2 (e - e + 1) + e - 1$$

$$E > e - 2 + e - 1$$

$$E > 2e - 3$$

