ΘΕΜΑ Α (A4) Λ − Σ − Σ − Σ − Λ

ΘΕΜΑ Β

(B1) $D_h = \{ x \in [2,+\infty) : \sqrt{x-2}+1 \in (1,+\infty) \}$

Είναι $\sqrt{x-2}+1 \in (1,+\infty) \Leftrightarrow \sqrt{x-2}+1 > 1 \Leftrightarrow$
$\sqrt{x-2} > 0 \Leftrightarrow x > 2$ δηλ $x \in (2,+\infty)$.

Άρα
$D_h = (2,+\infty)$.

και

$h(x) = (f\circ g)(x) = f(g(x)) = 2\ln\left(\sqrt{x-2}+1-1\right) =$

$= 2\ln\left(\sqrt{x-2}\right) = 2\ln\left[(x-2)^{\frac{1}{2}}\right] = 2\cdot\frac{1}{2}\ln(x-2) = \ln(x-2)$.

(B2) $D_h = (2,+\infty)$

Η h συνεχής στο $(2,+\infty)$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων

$h'(x) = \frac{1}{(x-2)}(x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0$ για κάθε $x \in (2,+\infty)$.

Άρα η h ↑ στο $(2,+\infty)$, άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται

Για την h^{-1} είναι:

- $D_{h^{-1}} = h(A) = \left(\lim_{x\to 2^+} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$ γιατί

$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} \ln(x-2) \xrightarrow[u\to 0]{u=x-2} \lim_{u\to 0} \ln u = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x-2) \xrightarrow[w\to+\infty]{w=x-2} \lim_{w\to+\infty} \ln w = +\infty$

και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

- $y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow x = e^y + 2$

Άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

(B3) Επειδή $\lim_{x\to 2} h(x) = -\infty$ από (B2) και

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = 2$$

Άρα $\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot \frac{f(x)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2} h(x) \cdot \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = (-\infty)\cdot 2 = -\infty$

ΘΕΜΑ Γ

(Γ1) (i) Αφού η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε από τον ορισμό: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ ①

Αν $\kappa=0$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mu x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mu x}{x^2} = 0$, $\mu\in\mathbb{R}$

Αν $\kappa\neq 0$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \kappa(+\infty)$

οπότε:
- αν $\kappa>0$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ άτοπο από ①
- αν $\kappa<0$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ άτοπο από ①

Άρα $\boxed{\kappa=0}$

(ii) Αφού $\kappa=0$ έχουμε $f(x) = \frac{\mu\cdot x}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{\mu(x^2+1) - 2x\cdot\mu x}{(x^2+1)^2} = \frac{-\mu x^2+\mu}{(x^2+1)^2}$$

Η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων $O(0,0)$ έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0)$$

Επειδή $f(0)=0$ και $f'(0)=\mu$ οπότε:

$$y - 0 = \mu\cdot(x-0)$$
$$y = \mu x$$

Ταυτίζοντας τις ευθείες $y=x$ και $y=\mu\cdot x$ έχουμε: $\boxed{\mu=1}$

Γ2 (i) Έστω $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως ρητή

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \quad , x \in \mathbb{R}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2+1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$

Άρα

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η f $\nearrow$ στο $[-1, 1]$

Η f $\searrow$ στο $(-\infty, -1]$ και στο $[1, +\infty)$

Η f παρουσιάζει Τ.Ε για $x = -1$, το $f(-1) = -\frac{1}{2}$

Η f παρουσιάζει Τ.Μ για $x = 1$ το $f(1) = \frac{1}{2}$

(Γ2) (ii) Γνωσ. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ και

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ άρα

$A_1 = (-\infty, -1] \xrightarrow{f\downarrow} f(A_1) = [f(-1), \lim_{x\to-\infty} f(x)) = [-\frac{1}{2}, 0)$

$A_2 = (-1, 1) \xrightarrow{f\uparrow} f(A_2) = (\lim_{x\to-1^+} f(x), \lim_{x\to1^-} f(x))$ $\frac{\text{αφού } f \text{ συνεχής}}{\text{στο } \mathbb{R}}$ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$A_3 = [1, +\infty) \xrightarrow{f\downarrow} f(A_3) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)] = (0, \frac{1}{2}]$

Οπότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Τέλος επειδή $a^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις

(α) Αν $a^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ τότε

$a^2 + \frac{1}{2} \notin f(A_1)$, $a^2 + \frac{1}{2} \notin f(A_2)$, $a^2 + \frac{1}{2} \in f(A_3)$

άρα η εξίσωση $f(x) = a^2 + \frac{1}{2}$ έχει ακριβώς μία λύση

(β) Αν $a^2 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$. τότε

$a^2 + \frac{1}{2} \notin f(A_1)$, $a^2 + \frac{1}{2} \notin f(A_2)$, $a^2 + \frac{1}{2} \notin f(A_3)$

άρα η εξίσωση $f(x) = a^2 + \frac{1}{2}$ δεν έχει λύση.

Γ3 (i) $I_v + I_{v+1} = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}\cdot\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^{2v+1}\,dx = \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2v+2}$$

(ii) $I_0 = \int_0^1 \frac{x^{2\cdot 0+1}}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

$I_1 \underset{v=0}{\overset{(i)}{=}} \frac{1}{2\cdot 0+2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2.$

$I_2 \underset{v=1}{\overset{(i)}{=}} \frac{1}{2\cdot 1+2} - I_1 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Θεωρώ την συνάρτηση $h(x)=g(x)+x$, $x\in\mathbb{R}$.

Η h συνεχής στο $\mathbb{R}$ με

$h'(x)=g'(x)+1\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Κ αφού η h' συνεχής στο $\mathbb{R}$ (η g' συνεχής από δεδομένα).

τότε η h' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$, άρα η h είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$

Τέλος αφού

$h(0)=g(0)>0$ αφού $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$h(-1)=g(-1)-1<0$ αφού $g(x)<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

άπο Θ. Bolzano για την h στο $[0,1]$ έχουμε ότι

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(-1,0)$: $g(x_1)=0 \Leftrightarrow g(x_1)+x_1=0$

Κ αφού η h είναι γνησίως μονότονη τότε το x_1 είναι μοναδικό.

Δ2 Η f παραγωγίσιμη στο 0

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^{2}(g(x)+x)}{x}=0 \quad (\text{αφού } \lim_{x\to 0^-}g(x)=g(0)\in\mathbb{R}$$

διότι η g συνεχής

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-kx}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\eta\mu x}{x}+\frac{\varepsilon\varphi x}{x}-\frac{kx}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(2\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\varepsilon\varphi x}{x}-k\right)\overset{(*)}{=}2\cdot 1+1-k=3-k$$

$(*)$ $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=1$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow 0=k-3\Leftrightarrow \boxed{k=3}$$

Δ3 i) Στο $[0, \pi/2)$ είναι $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$

Είναι:

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \overset{(*)}{=}$$

(*)

2	-3	0	1	ρ=1
	2	-1	-1	
2	-1	-1	$\boxed{0}$	

$$\overset{(*)}{=} \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)\cdot(2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)\cdot(\sigma\upsilon\nu x - 1)\cdot(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

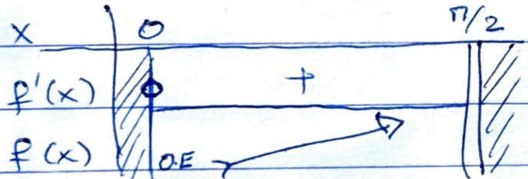
$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2\cdot(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2\cdot(2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1$ ή $\sigma\upsilon\nu x = -1/2$

Επειδή $x \in [0, \pi/2)$ $\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

$\sigma\upsilon\nu x = -1/2$ αδύνατη.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2\cdot(2\sigma\upsilon\nu x + 1) > 0$ ισχύει στο $(0, \pi/2)$



Η f παρουσιάζει ολ. ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 0$

Άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, \pi/2)$

ii) f συνεχής και γν. αύξουσα στο $[0, \pi/2)$. Άρα

$$f([0, \pi/2)) = [f(0), \lim_{x \to \pi/2} f(x)) \overset{(*)}{=} [0, +\infty)$$

(*) $$\lim_{x \to \pi/2} f(x) = \lim_{x \to \pi/2} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = 2\cdot 1 + \infty - \frac{3\pi}{2} = +\infty$$

$3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \pi/3$

$\frac{\pi}{3} \in f([0, \pi/2))$ και $f \uparrow$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (0, \pi/2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \pi/3$

Δ4 (i) Για $x=0$ είναι $f(0)=0$

Για $x\in[x_1,0)$ έχουμε $f(x)=x^2(g(x)+x)=x^2\cdot h(x)$

• Για την h στο $[x_1,0)$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} h \text{ γνησίως μονότονη} \\ \left.\begin{array}{l} h(x_1)=g(x_1)+x_1=0 \\ h(0)=g(0)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1<0 \\ h(x_1)<h(0) \end{array} \end{array}\right\} \text{ η } h \uparrow \text{ στο } [x_1,0)$$

Άρα για $x\geq x_1 \overset{h\uparrow}{\iff} h(x)\geq h(x_1) \iff h(x)\geq 0$ ①

Τέλος για $x\in[x_1,0)$ είναι $x^2>0$ ②

Από ①, ② προκύπτει $f(x)\geq 0$

Δ4 ii) $\Omega=\int_{x_1}^{f(x_2)}|f(x)|dx \overset{Δ_3}{\underset{ii}{=}} \int_{x_1}^{\pi/3}|f(x)|dx = \int_{x_1}^{0}|f(x)|dx+\int_{0}^{\pi/3}|f(x)|dx$

$\xrightarrow[f(x)\geq 0 \text{ στο } [0,\pi/3] \text{ από } Δ_3(i)]{f(x)\geq 0 \text{ στο } [x_1,0] \text{ από } Δ_4(i)} \int_0^{x_1} f(x)\,dx+\int_0^{\pi/3} f(x)\,dx =$

$=\int_0^{x_1} x^2(g(x)+x)\,dx+\int_0^{\pi/3}(2ημx+εφx-3x)\,dx = \Omega_1+\Omega_2$

όμως ο άξονας y'y χωρίζει το Ω σε 2 ισεμβαδικά χωρία $\Omega_1=\Omega_2$

Έχουμε:

$\Omega_2=\int_0^{\pi/3}(2ημx+εφx-3x)\,dx = \int_0^{\pi/3}\left(2ημx+\frac{ημx}{συνx}-3x\right)dx =$

$=\left[-2συνx-\ln(συνx)-\frac{3x^2}{2}\right]_0^{\pi/3} = \left(-2\cdot\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{6}\right)+2 =$

$=-1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}+2 = 1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}=\Omega_1$

Είναι:

$\Omega_1=\int_{x_1}^{0}x^3\,dx+\int_{x_1}^{0}x^2g(x)\,dx \iff 1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6} = -\frac{x_1^4}{4}+\left[\frac{x^3}{3}g(x)\right]_{x_1}^{0}-\int_{x_1}^{0}\frac{x^3}{3}g'(x)dx$

$\iff 1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6} = -\frac{x_1^4}{4}+\left(0-\frac{x_1^3}{3}\cdot(-x_1)\right)-\frac{1}{3}\cdot\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)\,dx$

$\iff \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{12}-1-\ln 2+\frac{\pi^2}{6}$

$\iff \int_{x_1}^{0}x^3g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{3}-3-3\ln 2+\frac{\pi^2}{2}$