

ΘΕΜΑ Α

A₁. Σχολικό βιβλίο σελ 93

A₂. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελ 16

A₃. Λ, Σ, Σ, Σ, Λ

A₄ α. $(c)' = 0$

β. $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

B₁

x_i	v_i	f_i	N_i
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
Σύνολο	50	100	

$$v_1 = 50 - (v_2 + v_3 + v_4 + v_5)$$

$$\Rightarrow v_1 = 50 - 40 \Rightarrow \boxed{v_1 = 10}$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{10}{50} = 0,2 = 20\%$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{15}{50} = 0,3 = 30\%$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{11}{50} = 0,22 = 22\%$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{8}{50} = 0,16 = 16\%$$

$$f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{6}{50} = 0,12 = 12\%$$

$$\bullet N_1 = v_1 = 10$$

$$\bullet N_2 = v_1 + v_2 = 25$$

$$\bullet N_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 36$$

$$\bullet N_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 44$$

$$\bullet N_5 = v = 50$$

$$\begin{aligned} B_2. \quad \bar{x} &= \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^5 x_i v_i = \frac{1}{50} \cdot (x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 + x_5 v_5) \\ &= \frac{1}{50} \cdot (0 \cdot 10 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6) = \\ &= \frac{1}{50} \cdot (15 + 22 + 24 + 24) = \frac{1}{50} \cdot 85 = \frac{17}{10} = 1,7 \end{aligned}$$

Άρα $\boxed{\bar{x} = 1,7}$

B3. Επειδή το δείγμα των παρατηρήσεων είναι $v=50$

δηλαδή άρτιος αριθμός, θα είναι:

$$s = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{Άρα } \boxed{s = 1,5}$$

B4. α) Το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες είναι:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 20 + 30 + 22 + 16 = \boxed{88\%}$$

β) Αν αυξηθούν οι υπερωρίες κατά 4 ώρες σε κάθε υπάλληλο η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\bar{x}' = \bar{x} + 4 \Leftrightarrow \bar{x}' = 1,7 + 4 \Leftrightarrow \boxed{\bar{x}' = 5,7}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha, x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (-2x^3 + 6x^2 + \alpha)' = -6x^2 + 12x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -6x \cdot (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x=0} \vee \underline{x-2=0} \Leftrightarrow \underline{x=2}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	-	0	0	-
f		↘	↗	↘

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty]$

Γ₂. Παράσχει τοπικό ελάχιστο για $x=0$, το $f(0) = -2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + \alpha$
 $\Leftrightarrow \boxed{f(0) = \alpha}$ και τοπικό μέγιστο για $x=2$ το

$$f(2) = -2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + \alpha = -16 + 24 + \alpha \Leftrightarrow \boxed{f(2) = \alpha + 8}$$

Ισχύει: $\frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{\alpha + \alpha + 8}{2} = -8$

$$\Leftrightarrow 2\alpha + 8 = -16 \Leftrightarrow 2\alpha = -24 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -12}$$

Γ₃. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι

$$(E): y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

$$f(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 12 = -2 + 6 - 12 = -8$$

$$f'(1) = -6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = -6 + 12 = 6$$

$$\Rightarrow y - (-8) = 6 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y + 8 = 6x - 6 \Leftrightarrow \boxed{y = 6x - 14}$$

Γ4. Είναι $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$ και από πρώτα μέρηματα
ισχύει ότι αν $x \in (2, +\infty)$ η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

$$\begin{aligned} \text{Αρα: } x \geq 2 \quad & \overset{f \downarrow}{\Rightarrow} f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \\ \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 & \leq 0 \Leftrightarrow -2 \cdot (x^3 - 3x^2 + 4) \leq 0 \\ \Leftrightarrow \boxed{x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 0$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 7x + \frac{2}{3} \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x + 7 = x^2 + 2\lambda x + 7$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + 2 \cdot \lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -4}$$

$$\text{Αρα } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}$$

Δ2. $f'(x) = x^2 - 8x + 7$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = 64 - 28 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
f'	+	0	0	+
f		↗	↘	↗

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και $[7, +\infty)$
και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$

$$\Delta_3. A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)}$$

• Η f είναι γνησίως αυξανσα αν $x \in [7, +\infty)$. Άρα
 $2020 < 2025 \xrightarrow{f \uparrow} f(2020) < f(2025) \Rightarrow f(2025) - f(2020) > 0$

• Η f είναι γνησίως φθίνουσα αν $x \in [1, 7]$. Άρα
 $\frac{3}{2} < \frac{5}{2} \xrightarrow{f \downarrow} f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$

Άρα το πρόσημο της παραστάσεως A είναι θετικό $\Rightarrow \boxed{A > 0}$

$$\Delta_4. f'(x) = x^2 - 8x + 7, \quad f''(x) = (x^2 - 8x + 7)' \Rightarrow f''(x) = 2x - 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - (2x - 8) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1 - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x-2} \cdot (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{\cancel{x-2}} = (2-8) \cdot (\sqrt{2+1} + \sqrt{3})$$

$$= -6(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = -6 \cdot 2\sqrt{3}$$

$$= \boxed{-12\sqrt{3}}$$