ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός — " ——

Α3. — " ——

Α4. Λ Σ Σ Λ Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1, \quad x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=x^2-2x-3, \quad x\in\mathbb{R}$

Β2. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$\Delta=4+12=16, \quad x_{1,2}=\frac{2\pm4}{2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
f'	+	0 −	0 +	
f	↗	↘	↗	

Η f γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[3,+\infty)$

f γνησίως φθίνουσα στο $[-1,3]$

Παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στο $x_0=-1$ το $f(-1)=-\frac{1}{3}-1+3+1=\frac{8}{3}$

και τοπ. ελάχιστο για $x=3$ το $f(3)=\cancel{9}-\cancel{9}-9+1=-8$

Β3. $f(0)=1$

$y=\lambda x+\beta$

$\lambda=f'(0) \Leftrightarrow \lambda=0^2-2\cdot0-3 \Leftrightarrow \lambda=-3 \Rightarrow y=-3x+\beta$

$(0,1)\in(\varepsilon) \Rightarrow 1=-3\cdot0+\beta \Leftrightarrow \beta=1$. Άρα $\boxed{(\varepsilon):\ y=-3x+1}$

Β4. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f'(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-2x-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}\cdot(x-3)}{\cancel{x+1}}=-4$

ΘΕΜΑ Γ

$4, 5, 4, \kappa, 0, 3, 7$

Γ1. $\bar{x} = \dfrac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7} \Leftrightarrow 4 = \dfrac{23+\kappa}{7} \Leftrightarrow 23+\kappa = 28 \Leftrightarrow \boxed{\kappa=5}$

Γ2. $0, 3, 4, 4, 5, 5, 7$

$\delta = t_4 \Leftrightarrow \boxed{\delta = 4}$

Γ3. $s^2 = \dfrac{1}{7} \cdot \left[(0-4)^2+(3-4)^2+(5-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2\right] =$

$= \dfrac{1}{7} \cdot (16+1+1+1+9) = \dfrac{1}{7} \cdot 28 = 4$

Αρα $\boxed{s=2}$

Γ4. $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow CV = \dfrac{2}{4} \Leftrightarrow CV = 0{,}5 > 0{,}1$ Αρα το δειγμα δεν ειναι ομοιογενες

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχυει $x \cdot y = 100 \Leftrightarrow y = \dfrac{100}{x}$

$\Pi = 2x + 2y \Leftrightarrow \Pi(x) = 2x + 2 \cdot \dfrac{100}{x} \Leftrightarrow \Pi(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$, $x > 0$

Δ2. $\Pi'(x) = \left(2x + \dfrac{200}{x}\right)' = 2 - \dfrac{200}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 200}{x^2}$, $x > 0$

$\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 200 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 200 \Leftrightarrow x^2 = 100 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 10$

x	0		10		$+\infty$
Π'		$-$	0	$+$	
Π		$\searrow$		$\nearrow$	

Η $\Pi(x)$ γν. αυξουσα στο $[10, +\infty)$ και γν. φθινουσα στο $(0, 10]$

Εχει την μικροτερη περιμετρο για $x = 10$ αρα $y = \dfrac{100}{10} = 10$

Επειδη $y = x = 10$ το ορθογωνιο ειναι τετραγωνο

Δ3. $x_1, x_2 \in (0, 10)$ οπου η $\Pi(x)$ ειναι γν. φθινουσα

Αρα $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \Pi(x_1) > \Pi(x_2)$

Αρα $A = \dfrac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ διοτι $\Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$ και $x_1 - x_2 < 0$

Δ4. $$\lim_{x \to 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x}-10} = \lim_{x \to 10} \frac{\frac{2x^2-200}{x^2}}{\sqrt{10x}-10} = \lim_{x \to 10} \frac{2\cdot(x^2-100)}{x^2\cdot(\sqrt{10x}-10)} =$$

$$= \lim_{x \to 10} \frac{2\cdot(x-10)\cdot(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{x^2(\sqrt{10x}-10)\cdot(\sqrt{10x}+10)} = \lim_{x \to 10} \frac{2\cdot(x-10)\cdot(x+10)\cdot(\sqrt{10x}+10)}{x^2\cdot(10x-100)}$$

$$= \lim_{x \to 10} \frac{2\cdot\cancel{(x-10)}\cdot(x+10)\cdot(\sqrt{10x}+10)}{10x^2\cdot\cancel{(x-10)}} = \frac{2\cdot 2\cancel{0}\cdot 2\cancel{0}}{10\cdot 1\cancel{0}\cancel{0}} =$$

$$= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$