Κτήριο Νέας Σμύρνης: Ελ. Βενιζέλου 142 (2ος& 3ος όροφος), Τηλ. 2109315119
Κτήριο Παλαιού Φαλήρου: Ελ. Βενιζέλου 271 (2ος όροφος), Τηλ. 2109843043
http://www.triptyxo.edu.gr - triptyxo@gmail.com - www.facebook.com/triptixo

ΤΑΞΗ	**Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	**29 ΜΑΡΤΙΟΥ 2026**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

(μονάδες 3+5=9)

Α2. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο [α,β];

(μονάδες 4)

Α3. Να συμπληρώσετε τα κενά που υπάρχουν στις παρακάτω προτάσεις:

α. Έστω μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0. Αν η f είναι ……….στο (α, x_0) και ……….. στο (x_0, β) ή αντίστροφα και η C_f έχει …………………. στο σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ τότε το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται …………………………… της C_f

β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι ……………. Αν …………. στο (α, x_0) και …………. στο (x_0, β), τότε το ………….. είναι τοπικό μέγιστο της f.

(μονάδες 2+2=4)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **αληθείς** ή **λανθασμένες.**

α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται "$1-1$" όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathrm{A}$ με $x_1 = x_2$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

β. Κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση μιας "$1-1$" συνάρτησης f το πολύ σε ένα σημείο.

γ. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ τότε υπάρχει αριθμός ρ κοντά στο x_0 ώστε $f(\rho) > 0$.

δ. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(μονάδες 4Χ2=8)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x)=e^{x-1}$, $x\in R$

$g(x)=x+e^{x-1}$, $x\in(-\infty,2]$ και

$h(x)=\ln x+\dfrac{e}{x}-e$, $x>0$.

Β1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

(μονάδες 6)

Β2. Αν $f^{-1}(x)=\ln x+1$, $x>0$, να ορίσετε τη συνάρτηση $\varphi=gof^{-1}$ και να αποδείξετε ότι είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

(μονάδες 6)

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς μονοτονία - ακρότατα.

(μονάδες 6)

Β4. Αν $\varphi(x)=x+\ln x+1$, $x\in(0,e]$, να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της φ η οποία διέρχεται από το σημείο Μ(e,2e).

(μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+e^x, & x\le 1 \\ e^x-\ln x+2x-1, & x>1 \end{cases}$

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

(μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο x_0, με $x_0\in(-1,0)$, για το οποίο ισχύει: $f(x_0)={x_0}^2-2x_0$.

(μονάδες 6)

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ω του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.

(μονάδες 7)

Γ4. Ένα σημείο $\text{M}(x(t),y(t))$ με $x(t)>1$, κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Η τετμημένη $x(t)$, μεταβάλλεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0)=2$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΚ, όπου Ο η αρχή των αξόνων και Κ η προβολή του σημείου M στον άξονα y΄y.

(μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ με $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{\eta\mu x}{x}+1\right)=0$

Δ1. Να δείξετε ότι για $x<0$ ισχύει $\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le -\frac{1}{x}$ και κατόπιν ότι $f(1)=0$.

(μονάδες 5)

Έστω ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με f'' συνεχή συνάρτηση και ισχύει $\left(\left(f'(x)\right)^2\right)' \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

Δ2. Αν $f'(1)=-2$ και F είναι μία παράγουσα της f στο R, να λύσετε την ανίσωση:

$$F(e^x+1)+F(x+1) \ge F(e^x)+F(x+2)$$

(μονάδες 6)

Δ3. Αν $f'(2)>-2$, να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)+2x=2.$$

(μονάδες 6)

Δ4. Αν $f(0)=2$, να δείξετε ότι

$$3 < 4\cdot\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx < f\left(\frac{1}{2}\right)+2.$$

(μονάδες 8)

ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ