

[Αρχή Σελίδας 1]

ΤΑΞΗ	Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	4 ΜΑΙΟΥ 2025

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο διάστημα Δ .

(μονάδες 7)

A2. Να γράψετε τον ορισμό του σημείου καμπής μιας συνάρτησης f .

(μονάδες 5)

A3. Δίνεται η πρόταση:

«Αν $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in R$, τότε αναγκαστικά ισχύει ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in R$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in R$.

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση ως Αληθή ή Ψευδή

(μονάδες 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(μονάδες 3)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ).

α. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της σε κάθε σημείο της είναι κάτω από τη γραφική της παράσταση στο Δ .

β. Για κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ δεν υπάρχει διάστημα $[\alpha, \beta]$ στο οποίο να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f .

γ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε το σύνολο τιμών της είναι επίσης διάστημα.

(μονάδες 3x3=9)

[Αρχή Σελίδας 2]

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1, & x \leq 1 \\ \ln x - e^{x-1} + \alpha, & x > 1 \end{cases}$.

B1. Να βρείτε την τιμή του α .

(6 μονάδες)

Για $\alpha=0$:

B2. Για $x \leq 1$:

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(1 - \sqrt{f(x) + 1}) = 0$.

(4+3=7 μονάδες)

B3. Να βρείτε, αν ορίζεται, την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, -1)$.

(6 μονάδες)

B4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 f(x) dx$.

(6 μονάδες)

[Αρχή Σελίδας 3]

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ την οποία ισχύει:

$$f(x) = x^2 + \frac{6}{5} \cdot \int_0^1 xf(t) dt \text{ για κάθε } x \in R.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 + x$, $x \in R$.

(6 μονάδες)

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - x$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία που εφάπτεται στην γραφική παράσταση της φ στο σημείο της $A(1,1)$.

(7 μονάδες)

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = f(x) + \ln x$, $x > 0$.

α. Να δείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε την ανίσωση $x^4 + \ln x < x$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(3+4=7 μονάδες)

Γ4. Ένα σημείο $M(x(t), y(t))$ με $x(t) > 0$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f . Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου M είναι 1 μονάδα/δευτερόλεπτο να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta(t)$ που σχηματίζει η εφαπτομένη του με τον άξονα των x τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο M συναντά την γραφική παράσταση της συνάρτησης h .

(5 μονάδες)

[Αρχή Σελίδας 4]

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f'(x) - f(x) = e \ln x - \frac{e}{x} \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } f(1) = e.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x - e \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

(6 μονάδες)

Δ2. α. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(3+4=7 μονάδες)

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x) - 2024) = e$ έχει δύο ακριβώς ρίζες x_1, x_2 με $0 < x_1 < 1 < x_2$.

(6 μονάδες)

Δ4. Να δείξετε ότι, για τα x_1, x_2 του ερωτήματος **Δ3**, ισχύει

$$(f(x) - e)(1 - x_1)(x_2 - 1) > (x_2 - 1)(e - 2025) - (1 - x_1)(2025 - e)$$

(6 μονάδες)

ΜΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ