1ο κτήριο: Ελ. Βενιζέλου 142 (2ος& 3ος όροφος), Τηλ. 2109315119
2ο κτήριο: Ελ. Βενιζέλου 271 (2ος όροφος), Τηλ. 2109843043
http://www.triptyxo.edu.gr - triptyxo@gmail.com - www.facebook.com/triptixo

ΤΑΞΗ	**Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 2023**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να γράψετε τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

(4 μονάδες)

Α2. Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής, ισχύει ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β).

(7 μονάδες)

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για μια συνάρτηση f και να γράψετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

(3+3=6 μονάδες)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ).

α. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ενα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της τότε δεν παρουσιάζει ακρότατα σε αυτό.

β. Για κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:R\to R$ δεν υπάρχει διάστημα $[\alpha,\beta]$ στο οποίο να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f.

γ. Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f:(-\infty,0)\to R$ έχει το πολύ δύο ασύμπτωτες.

δ. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει την εφαπτομένη της σε ένα ακριβώς σημείο.

(4x2=8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=(2x+1)^2-4,\ x\geq -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad g(x)=\sqrt{x},\ x\geq 0.$$

Β1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}.

(2+3=5 μονάδες)

Β2. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α ώστε η ευθεία $y=\alpha x-7$ να εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f.

(6 μονάδες)

Β3. Αν $\alpha=12$ να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την ευθεία $y=\alpha x-7$ και τον άξονα $y'y$.

(6 μονάδες)

Β4. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h=gof$, να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$.

(3+5=8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = 3x(\ln x - 1)^2 - 4,\ x > 0$$

Γ1. Να ορίσετε την τιμή του $\kappa \in R$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x > 0 \\ \kappa, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής.

(6 μονάδες)

Έστω $\kappa = -4$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες.

(5 μονάδες)

Γ3. Έστω επιπλέον η συνάρτηση $h(x) = \ln x,\ x > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (\frac{1}{e}, e)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $\mathrm{M}\left(x_0, h(x_0)\right)$ να σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό $\mathrm{E} = \frac{2}{3}$.

(7 μονάδες)

Γ4. Αν F μια παράγουσα της συνάρτησης f στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$, να αποδείξετε ότι $\int_{\pi}^{2\pi} (F(x) + 4x)\sigma\upsilon\nu x dx > 0$

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=e^x+x$ και $f(x)=\ln(1+xe^{-x})$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(-1,0)$.

(4 μονάδες)

Δ2. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $(x_0,+\infty)$.

(5 μονάδες)

Δ3. Να βρείτε το ολικό μέγιστο της συνάρτησης f .

(5 μονάδες)

Δ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 xe^{-x}dx$ και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\left(\int_0^2 f(x)dx-1+3e^x\right)=(x+2)(2-e^x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2,0)$.

(5+6=11 μονάδες)

ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ