

[Αρχή Σελίδας 1]

ΤΑΞΗ	Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	12/3/2022

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη σε διάστημα Δ :

- είναι συνεχής στο Δ
 - $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ
- τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ **(6 μονάδες)**

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος. **(3 μονάδες)**

A3. Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ; **(3 μονάδες)**

A4. Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό με το γράμμα Α, αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

“Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι θέση ακροτάτου της f .” **(1+2=3 μονάδες)**

A5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν με το γράμμα Σ, αν είναι σωστή ή με το γράμμα Λ, αν είναι λάθος.

α. Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε σημείο x εσωτερικό του Δ .

β. Αν μια συνάρτηση $f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής.

[Αρχή Σελίδας 2]

γ. Αν μια συνάρτηση ορίζεται στο \mathbb{R} δεν δέχεται κατακόρυφη εφαπτομένη.

δ. Αν μια συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 , τότε $f'(x_0)=0$.

ε. Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0 . **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}, x \neq 0$.

B1. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **(7 μονάδες)**

B2. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **(6 μονάδες)**

B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $f(x)$. **(6 μονάδες)**

B4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_1^e f(x)dx$. **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x-1}, & x \in (0,1) \cup (1, +\infty) \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$

G1. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της $f(x)$ στο σημείο αυτό να είναι παράλληλη με την ευθεία $(\eta): y = (2 \ln 2 - 1) \cdot x - 4$ **(6 μονάδες)**

G2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)$. **(6 μονάδες)**

[Αρχή Σελίδας 3]

Γ3. Να λυθεί η ανίσωση $f(2 - \ln x) < f(2^x)$. **(6 μονάδες)**

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο σημείο $M(1, f(1))$ και να δείξετε ότι $f(x) \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο R και η συνάρτηση $g: R \rightarrow R$, με $g(0) = 0$ και $g'(0) = 1$.

Επιπλέον ισχύουν:

- $f^3(x) + f(x) = g(x) + \frac{1}{e}$
- $g''(x) + g(x) = 2g'(x)$
- $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [-1, +\infty)$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{g'(x) - g(x)}{e^x}$ είναι σταθερή στο R και να δείξετε ότι $g(x) = xe^x$. **(6 μονάδες)**

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **(6 μονάδες)**

Δ3. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$. **(3 μονάδες)**

Δ4. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[-1, +\infty)$. **(5 μονάδες)**

Δ5. Να δείξετε ότι $f(x^2) < \frac{(x^2+1)f(x^2+1)}{x^2+2}$ για κάθε $x \in R$. **(5 μονάδες)**