

[Αρχή Σελίδας 1]

ΤΑΞΗ	Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	22 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2020

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να γράψετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

**(4+2=6 μονάδες)**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

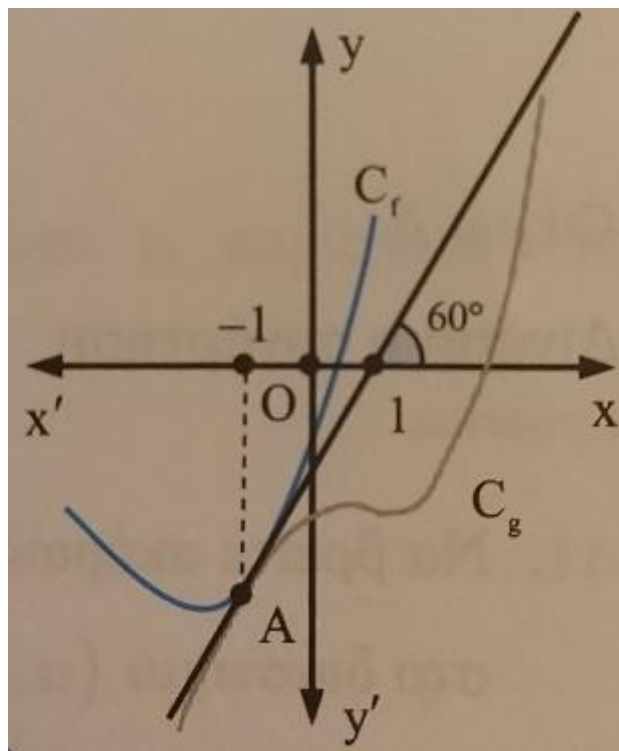
**(3 μονάδες)**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**(7 μονάδες)**

[Αρχή Σελίδας 2]

**A4.** Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$ ,  $g$  και η κοινή τους εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ), στο σημείο  $A(-1, f(-1))$ . Να βρείτε :



- α.  $f'(-1), g'(-1)$
- β. την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης

γ.  $\left(\frac{f}{g}\right)'(-1)$

(9 μονάδες)

[Αρχή Σελίδας 3]

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να δείξετε ότι  $f'(x) = (x+1)^3 + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , κατόπιν να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και τέλος να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(6 μονάδες)

**B2.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 8x = -4$$

(4 μονάδες)

**B3.** Να βρείτε την εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(0,1)$  και να αποδείξετε ότι έχει με αυτήν μόνο ένα κοινό σημείο.

(7 μονάδες)

**B4.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f'$  αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

(8 μονάδες)

[Αρχή Σελίδας 4]

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη  $f$  συνάρτηση στο  $R$ , για την οποία ισχύει ότι

- $f'(x)f(x) - e^{-x}(f(x) - f'(x)) - e^{-2x} = 0$  για κάθε  $x \in R$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{2f(0)x^2 + 5x + 2x} \right) = l \in R$

**Γ1.** Να δείξετε ότι  $f(0) = 2$ ,  $l = -\frac{5}{4}$  και  $f(x) = 3 - e^{-x}$ ,  $x \in R$

(8 μονάδες)

**Γ2.** Να υπολογίσετε χωρίς τη χρήση των κανόνων του Hospital το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - e^{-x} + \eta\mu(x^2 - 1)}{x - 1}$$

και κατόπιν να αιτιολογήσετε για ποιό λόγο δεν υπάρχει διάστημα της μορφής  $[\alpha, \beta]$  στο οποίο να μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση  $f$ .

(7 μονάδες)

[Αρχή Σελίδας 5]

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \mathbb{R}$  για το οποίο ισχύει

$$ef(f(x_0)) = 3e - 1$$

**(4 μονάδες)**

**Γ4.** Έστω ένα σημείο  $M(x(t), y(t))$ , το οποίο κινείται στην καμπύλη  $y = f(x)$ . Αν γνωρίζετε ότι τη χρονική στιγμή  $t_0$  διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες  $A(0, 2)$  και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σε εκείνο το σημείο είναι 2 μονάδες/χρόνο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας  $\theta$  που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής της συνάρτησης  $f$  με τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $A$ .

**(6 μονάδες)**

[Αρχή Σελίδας 6]

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι

- Η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$
- Η ευθεία  $y=1$  είναι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(1,1)$ .
- $f'(x) \geq 1-x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε ένα σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0,1)$ .

Δίνεται επίσης η συνάρτηση  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$  με σύνολο τιμών

το  $\mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(4 μονάδες)

[Αρχή Σελίδας 7]

**Δ2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  και κατόπιν να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

(9 μονάδες)

**Δ3.** Αν γνωρίζετε ότι η  $g^{-1}$  είναι συνεχής, να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f'$  στο  $B(1,0)$  τέμνει την γραφική παράσταση της  $g^{-1}$  σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη  $\xi \in (0,1)$ .

(6 μονάδες)

**Δ4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = x$  έχει μοναδική ρίζα  $\rho \in (-\infty, 1)$ .

(6 μονάδες)

**ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**