

	ΤΑΞΗ	Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
	ΤΜΗΜΑΤΑ	ΓΜΑΘ1-ΓΜΑΘ2-ΓΜΑΘ3-ΓΜΑΘ4
	ΜΑΘΗΜΑ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	30 ΜΑΡΤΙΟΥ 2019

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(7 μονάδες)

A2. Να γράψετε τον ορισμό του σημείου καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f

(4 μονάδες)

A3.

α. Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστή** ή **Λάθος** την παρακάτω πρόταση:

«Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση x_0 ακρότατο τότε ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$ »

(2 μονάδες)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(4 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **σωστές** ή **λανθασμένες**.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ τότε ισχύει ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$

β. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό του αριθμητή $P(x)$

μεγαλύτερο του βαθμού του παρονομαστή $Q(x)$, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

γ. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow R$ ονομάζεται ολικό μέγιστο

δ. Αν για μια συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow R$ ισχύει ότι $f(x) \geq 0$

για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$

(4 • 2=8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = e^x - 1, & x < 0 \\ f_2(x) = \ln(x + a), & x \geq 0 \end{cases}$

B1. Να βρείτε την τιμή του a .

(6 μονάδες)

Αν $a = 1$, τότε:

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(0, f(0))$.

(7 μονάδες)

B3. Να δείξετε ότι δεν ορίζεται η συνάρτηση $g = f_1 \circ f_2$.

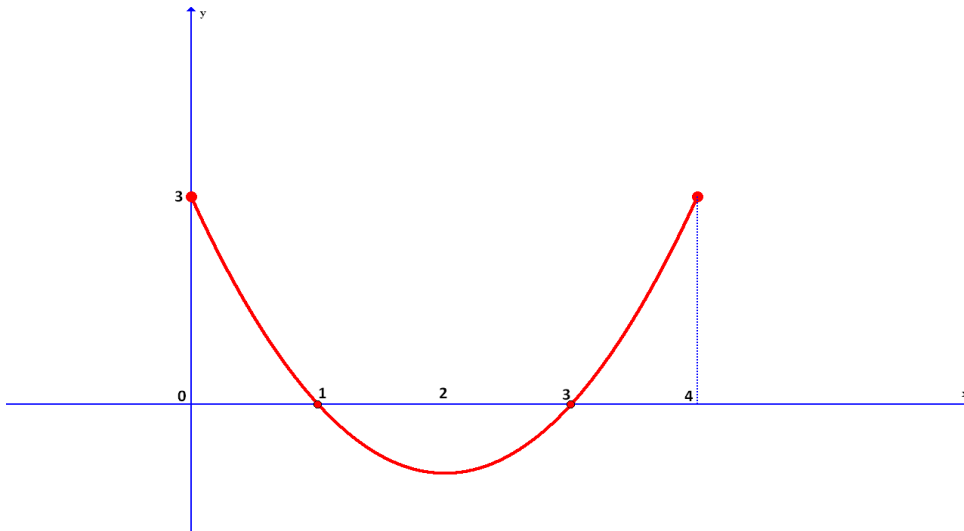
(5 μονάδες)

B4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Η γραφική παράσταση της παραγώγου f' της f , φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν γνωρίζετε ότι

- $f(4) = \frac{5}{3}$
- Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Rolle στο $[0, 3]$.
- Η ευθεία $y = -x + 3$ εφάπτεται της C_f στο $M(2, f(2))$.
- $\int_2^3 xf''(x)dx = \frac{8}{3}$ και
- Το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f' και τον άξονα $x'x$ ισούται με $\frac{4}{3}$

τότε:

Γ1. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ και $f(3)$

(6 μονάδες)

Γ2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, την κυρτότητα, να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμψής της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

(8 μονάδες)

Γ3. Να δείξετε ότι: $\int_2^4 \frac{f(x)}{x} dx > 3\ln 2 - 2$

(5 μονάδες)

Γ4. Ένα σημείο $A(x(t), y(t))$ κινείται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η τετμημένη του $x(t)$ αυξάνεται με ρυθμό $x'(t) = 3 \text{ cm/sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$ την χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το κινητό διέρχεται από το σημείο $M(2, f(2))$.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

- $xf'(x) = f(x) + \ln x + x - 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $f(e) = e - 1$

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της f .

(5 μονάδες)

Αν $f(x) = (x-1)\ln x$, $x \in (0, +\infty)$, τότε:

Δ2. Να δείξετε ότι

α. η εξίσωση $x^{x-1} - e^{2019} = 0$ έχει δύο ακριβώς λύσεις $x_1 < x_2$.

(7 μονάδες)

β. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 2019 - f'(x_0)$$

(4 μονάδες)

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{(x-1)(x^2+1)}$, $x \in (0, +\infty)$ και

έστω G μία παράγουσα της g στο $(0, +\infty)$ με $G(1) = 0$.

Να δείξετε ότι:

α. $G\left(\frac{1}{x}\right) = G(x)$ για κάθε $(0, +\infty)$

(4 μονάδες)

β. $\int_1^2 G(x) dx > \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{G(x)}{x} dx$

(5 μονάδες)

ΜΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ