ΤΑΞΗ	Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	30 ΜΑΪΟΥ 2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να γράψετε τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

(4 μονάδες)

Α2. Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής, ισχύει ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β).

(7 μονάδες)

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για μια συνάρτηση f και να γράψετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

(3+3=6 μονάδες)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ).

α. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ενα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της τότε δεν παρουσιάζει ακρότατα σε αυτό.

β. Για κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:R\to R$ δεν υπάρχει διάστημα $[\alpha,\beta]$ στο οποίο να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f.

γ. Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f:(-\infty,0)\to R$ έχει το πολύ δύο ασύμπτωτες.

δ. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει την εφαπτομένη της σε ένα ακριβώς σημείο.

(4x2=8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\sqrt{2}x}+\ln(2x+1)-1,\ \ x>-\dfrac{1}{2}$

Β1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(5 μονάδες)

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{\sqrt{2}x}=\alpha+1-\ln(2x+1)$ έχει ακριβώς μια ρίζα για κάθε τιμη του πραγματικού αριθμού α.

(5 μονάδες)

Β3. Να βρείτε την $f'''(x)$ (3η παράγωγος της f) και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο R την οποία και να βρείτε.

(3+4=7 μονάδες)

Β4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η εξίσωση

$$f^{-1}\left(f\left(x^3-2x^2+4\right)+e^{\sqrt{2}}-1+\ln 3\right)=1$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(-2,0)$.

(2+6=8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,h:R\to R$ για τις οποίες ισχύουν:

- $h^2(x)+2h(x)-3=e^{2x}+4e^x$ για κάθε $x\in R$ με $h(0)=2$.
- $f(x)=\begin{cases}\alpha x^3+\beta x+2, & x\le 0\\ h(x), & x>0\end{cases}$
- Η ευθεία $y=4x+4$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{A}\left(-1, f\left(-1\right)\right)$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha=\beta=1$ και $h(x)=e^x+1$ για κάθε $x\in R$.

(3+3=6 μονάδες)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και αφού θεωρήσετε γνωστό ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(x)+e^x}{x-f^{-1}(x)}$.

(3+4=7 μονάδες)

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{f^{-1}(x)-2}{x}=x^2+1$ για κάθε $x<0$.

(6 μονάδες)

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε

$$6f'(\xi)-3f'(1)=f'(2)+2f'(3)$$

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$,η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων, και για την οποία ισχύει ότι $f'(\varepsilon\varphi x) = \sigma\upsilon\nu^3 x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in R$.

(5 μονάδες)

Δ2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

(4+2=6 μονάδες)

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) - f'(x^2) - f(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x > 0$.

(7 μονάδες)

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση

$$f\Big(f'(\sigma\upsilon\nu x + 1) + f'\big(x^2 - 3\pi x + 2\pi^2\big) - 2\Big) = 0$$

(7 μονάδες)

ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ