ΘΕΜΑ Α

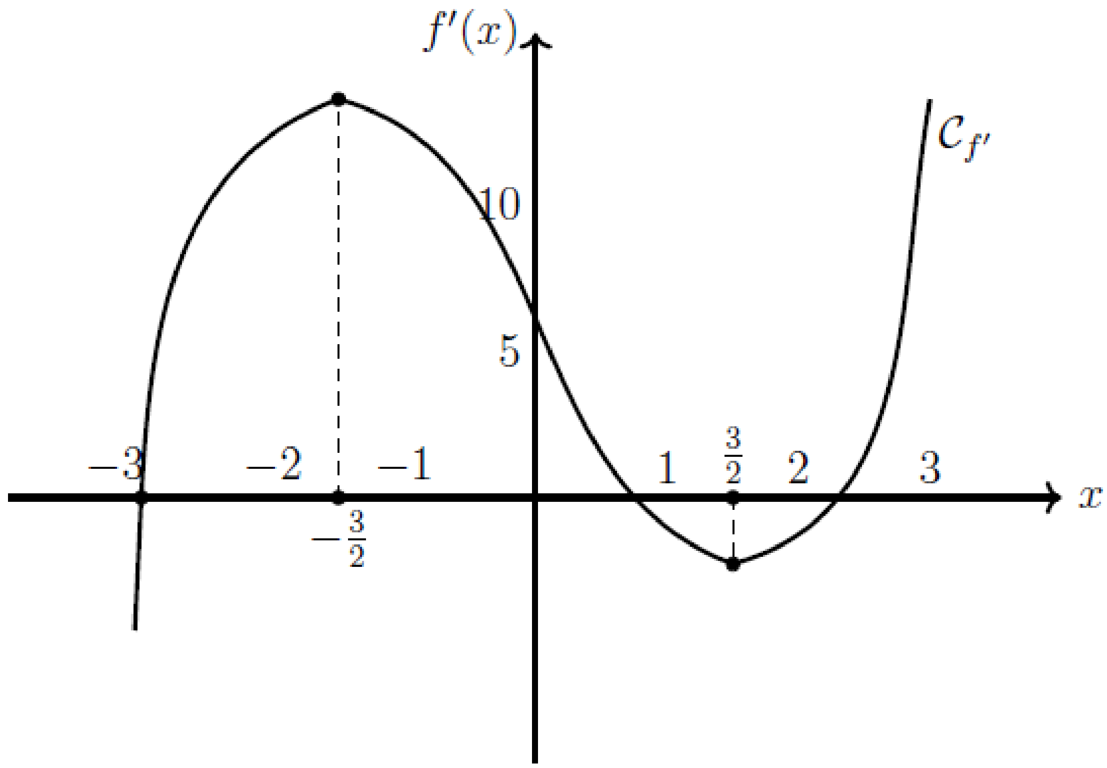
Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$

(7 μονάδες)

Α2. Πότε το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(4 μονάδες)

Α3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f': R \to R$



Αν γνωρίζετε ότι

- $f(-3)=-2, \qquad f(1)=3, \qquad f(2)=-1$
- $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{5}{2}=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f και να την σχεδιάσετε.

x						
$f''(x)$						
$f'(x)$						
$f(x)$						

(4+2=6 μονάδες)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως ***σωστές ή λανθασμένες.***

α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε δεν υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

β. Αν η ευθεία $y=\beta$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

γ. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)$

(4Χ2=8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2+3x+1,\ x\in R$

Β1. Να βρείτε έναν ακέραιο αριθμό α, ώστε η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\alpha,\alpha+1)$.

(4 μονάδες)

Β2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(8 μονάδες)

Β3. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$ και στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης (ε) και της ευθείας $x=-1$.

(3+4=7 μονάδες)

Β4. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$f^3(x)-3f^2(x)+3f(x)=7$$

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι: $xf'(x)+f^2(x)=0$ για κάθε $x>1$ και $f(e)=1$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ και ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

(4+2=6 μονάδες)

Γ2. **α.** Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της $g(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{ef(x)+x-2e}}$

β. Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_e^{2e} f(x)dx>\frac{e}{2}$

(5+4=9 μονάδες)

Γ3. Να δείξετε ότι $e\ln\dfrac{\alpha}{\beta}+(\beta-\alpha)\cdot\ln\alpha\cdot\ln\beta>0$ με $e<\alpha<\beta$

(4 μονάδες)

Γ4. Έστω ότι η τετμημένη του σημείου $\mathrm{K}(k,f(k))$, $k>1$, απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα $2k\ cm/\sec$. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ, που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε)της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Κ με τον άξονα x΄x, τη χρονική στιγμή t_0 για την οποία $k=e$, δίνεται από τη σχέση: $\theta'(t_0)=\dfrac{6}{e}\sigma\upsilon\nu^2\theta(\mathrm{t}_0)$

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \ln(e^x-x), & x<0 \\ \dfrac{e^x}{x+1}-1, & x\geq 0 \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο, το οποίο και να βρείτε. Κατόπιν να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(3+2=5 μονάδες)

Δ2. Να ορίσετε την f'' και να δείξετε ότι η f έχει μοναδικό σημείο καμπής με τετμημένη αρνητικό αριθμό.

(7 μονάδες)

Δίνεται η παραγωγίσιμη και γνησίως μονότονη συνάρτηση $g: R \to R$

Δ3. Αν ισχύει $f'\left(f\left(g(3)-1\right)+f\left(g(2)+1\right)+1\right)=\dfrac{e}{4}$, να δείξετε ότι η g έχει μοναδική ρίζα στο (2,3).

(6 μονάδες)

Δ4. **α.** Να δείξετε ότι $g(0)<g(1)<0$

β. Αν γνωρίζετε ότι $\displaystyle\int_{g(0)}^{g(1)} f(x)dx = e^{g(1)}-e^{g(0)}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

(2+5=7 μονάδες)