

[Αρχή Σελίδας 1]

ΤΑΞΗ	Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	14/4/2024

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν:

- Η f είναι συνεχής στο Δ
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(μονάδες 7)

A2. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

(μονάδες 5)

A3. Δίνεται η πρόταση: «Αν $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε αναγκαστικά ισχύει ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση ως Αληθή ή Ψευδή

(μονάδες 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(μονάδες 3)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ).

α. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της τότε δεν παρουσιάζει ακρότατα σε αυτό.

β. Για κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν υπάρχει διάστημα $[\alpha, \beta]$ στο οποίο να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f .

γ. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει την εφαπτομένη της σε ένα ακριβώς σημείο.

(μονάδες $3 \times 3 = 9$)

[Αρχή Σελίδας 2]

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x-4}$ και $g(x) = x^2 + 3$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

(μονάδες 7)

B2. Αν $h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, $x \neq \pm 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)$ ως

προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(μονάδες 7)

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h .

(μονάδες 6)

B4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[h(x) \cdot \eta \mu \frac{1}{h(x)} \right] + 2024$$

(μονάδες 5)

[Αρχή Σελίδας 3]

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει ότι:

- η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- $\frac{e^{f'(x)}}{e^{\frac{1}{x^2+1}}} - f'(x) - 1 = -\frac{1}{x^2+1}$ για κάθε $x \in R$

Γ1. Να δείξετε ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης $e^x = x+1$ είναι η $x=0$ και κατόπιν ότι $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ για κάθε $x \in R$.

(μονάδες 3+4=7)

Γ2. Να δείξετε ότι ισχύει $f(\varepsilon\varphi x) = x$ για κάθε $x \in R - \{x \in R / \sin x \neq 0\}$

(μονάδες 6)

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο της με τετμημένη 0.

(μονάδες 3)

Γ4. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{-3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8}$ «διαπερνά» τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' .

(μονάδες 4)

Γ5. Ένα σώμα Μ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' για $x>0$, ώστε κάθε χρονική στιγμή οι συντεταγμένες του να είναι $M(x(t), y(t))$. Την χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία διέρχεται από το σημείο $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του $x(t)$ είναι $2\text{μον}/\text{sec}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta(t)$ που σχηματίζει η εφαπτομένη στο σημείο Μ με τον άξονα των x τη χρονική στιγμή t_0 .

(μονάδες 5)

[Αρχή Σελίδας 4]

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f'(x) + \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x+1}$ για κάθε $x > 0$ και
- $f(1) = 2 \int_1^e \frac{1}{x(x+1)} dx + \ln\left(1 + \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2}\right)$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(1) = 2 \ln 2$ και $f(x) = (x+1) \ln \frac{x+1}{x}$, $x > 0$

(μονάδες 3+4=7)

Δ2. Να δείξετε ότι $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$ και κατόπιν να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(μονάδες 3+4=7)

Δ3. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ και ότι ισχύει

$$f(x) + f(2024 - x) \geq 2f(1012) \text{ για κάθε } x \in (0, 2024)$$

(μονάδες 4)

Δ4. Να δείξετε ότι:

α. $t^2 \int_1^2 f(x) dx - 2t + \int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$

β. $\int_1^2 f(x) dx \cdot \int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx \geq 1$

(μονάδες 4+3=7)

ΜΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ