

Θέμα Α

1. Έστω t_1, t_2, \dots, t_n οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Q ενός δείγματος μεγέθους n , που έχουν μέση τιμή \bar{x} . Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_n - \bar{x}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

2. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A κάποιου δειγματικού χώρου Ω .

Μονάδες 4

3. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

(α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 όρια πραγματικών αριθμούς, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

(β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το A , τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πάντα πεδίο ορισμού το A .

(γ) Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R \approx 6\bar{x}$.

(δ) Η αθροιστική συχνότητα N_i μίας κατανομής εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

(ε) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x+k}$, με $k \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε την τιμή του k αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, \frac{e}{2})$.

Μονάδες 5

2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

3. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$.

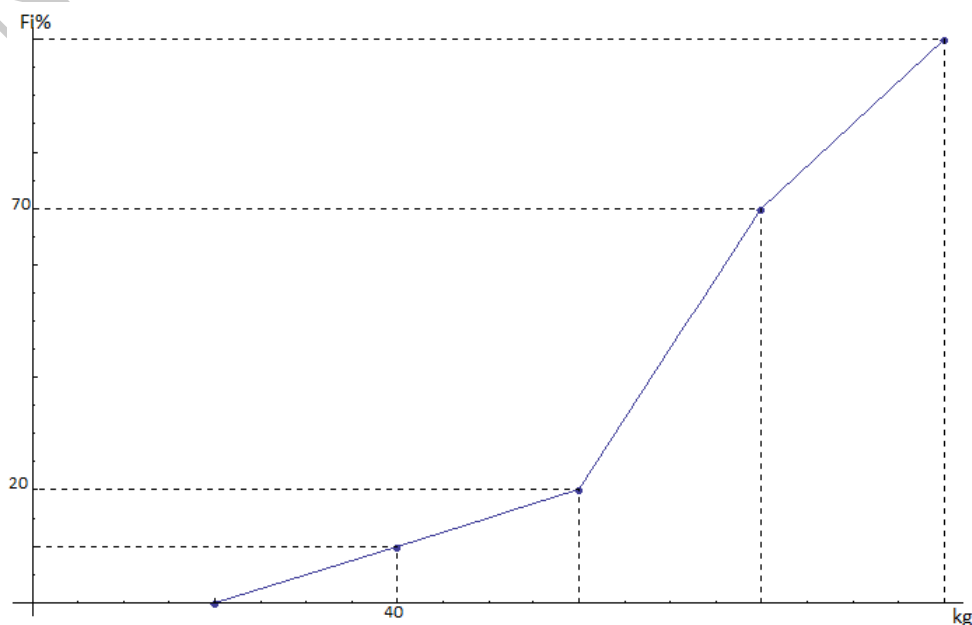
Μονάδες 6

4. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(-2)$ και $f(-3)$.

Μονάδες 4

Θέμα Γ

Το βάρος, σε κιλά (kg), των μαθητών της Γ' Λυκείου σε ένα φροντιστήριο ομαδοποιείται σε 4 ισοπλατείς κλάσεις, των οποίων οι συχνότητες είναι ομοιόμορφα καταναμημένες. Δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους των μαθητών.



Γνωρίζουμε ότι το μέσο βάρος των μαθητών είναι 70, η συχνότητα της 4ης κλάσης είναι 15, στο κυκλικό διάγραμμα των δεδομένων η γωνία του κυκλικού τομέα της 1ης κλάσης είναι 36° , και ισχύει ότι $\sum_{i=1}^3 x_i \cdot \nu_i = 2150$.

1. Να βρείτε την κεντρική τιμή x_4 της 4ης κλάσης.

Μονάδες 4

2. Για $x_4 = 90$, να δείξετε ότι το πλάτος των κλάσεων είναι $c = 20$ και να υπολογίστε το εύρος R του δείγματος.

Μονάδες 6

3. Να σχηματίσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων με τα μεγέθη $x_i, \nu_i, f_i\%, F_i\%$.

Μονάδες 6

4. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$.

Μονάδες 4

5. Να δείξετε ότι η διάμεσος του δείγματος είναι $\delta = \frac{306}{5}$.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Η παραγωγή ελαιόλαδου, σε χιλιάδες λίτρα (χ.λ.), ενός δείγματος 4.000 αγροτών, ακολουθεί κανονική κατανομή. Στο δείγμα βρέθηκαν 100 αγρότες με παραγωγή μικρότερη από 1.400 χ.λ. και 3.360 αγρότες με παραγωγή μικρότερη από 2.000 χ.λ..

1. Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} , την τυπική απόκλιση s και να εκτιμήσετε το εύρος R της παραγωγής ελαιόλαδου του δείγματος.

Μονάδες 7

2. Την επόμενη χρονιά έγινε πάλι καταμέτρηση της παραγωγής ελαιολάδου στους ίδιους αγρότες και παρατηρήθηκε μείωση της παραγωγής κατά 25 %. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά των νέων τιμών, και να εκτιμήσετε το εύρος της νέας παραγωγής.

Μονάδες 6

3. Επιλέγουμε τυχαία έναν αγρότη από το δείγμα. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :

A: « Ο αγρότης να έχει παραγωγή μικρότερη ή ίση από 1.200 χ.λ..»

B: « Ο αγρότης να έχει παραγωγή μεγαλύτερη ή ίση από 2.000 χ.λ..».

Να βρείτε τις πιθανότητες:

(α) ώστε να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A.

Μονάδες 2

(β) ώστε να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B.

Μονάδες 2

(γ) ώστε να πραγματοποιηθούν τα ενδεχόμενα A ή B.

Μονάδες 4

4. Να δείξετε ότι $P(A \cup B) \geq \frac{4}{25}$.

Μονάδες 4