ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

(7 μονάδες)

Α2. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού ελαχίστου για την f.

(4 μονάδες)

Α3. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β];

(4 μονάδες)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως ***σωστές ή λανθασμένες.***

α. Μια συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to R$ λέγεται συνάρτηση 1-1 όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathrm{A}$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

β. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει ότι $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

γ. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x\to -\infty} \alpha^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha^x = +\infty$

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ε. Ισχύει $|\eta\mu x| < x$ για κάθε $x > 0$.

(5Χ2=10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$, $x\neq 1$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία - ακρότατα (4 μονάδες) και κατόπιν να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2017$ έχει ακριβώς δυο ρίζες (4 μονάδες).

(8 μονάδες)

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι δεν έχει σημεία καμπής.

(5 μονάδες)

Β3. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x(x-2)}$, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=3$ και $x=4$, ισούται με $\ln\dfrac{4}{3}$.

(7 μονάδες)

Β4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 4}\frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx$.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(1)=f'(1)=0$, για την οποία ισχύει

$$xf'(x)-f(x)-x^2f''(x)=-x^2-3 \text{ για κάθε } x>0.$$

Γ1. Να βρείτε τον τύπο της f.

(6 μονάδες)

Για τα ερωτήματα **Γ2**, **Γ3** και **Γ4** να θεωρήσετε ότι

$$f(x)=2x\ln x+x^2-4x+3,\ x>0$$

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και ακρότατα.

(3 μονάδες)

Γ3. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=x\ln x \text{ και } h(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

(5 μονάδες)

Γ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει $F(1)=0$, να δείξετε ότι:

α. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε

$$(\xi-2)\cdot f(f(\xi)+\xi)=-\frac{F(f(\xi)+\xi)}{f'(\xi)+1}$$

(4 μονάδες)

β. για κάθε $\alpha,\beta\in R$ με $1<\alpha<\beta$ ισχύει η ανισότητα:

$$\beta F(\alpha)+F(\beta)<\alpha F(\beta)+F(\alpha).$$

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, για την οποία ισχύουν: $f(-1)=-1$, $f(1)=1$ και $f'(x)\geq 1$ για κάθε $x\in R$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(0)=0$.

(4 μονάδες)

Για τα ερωτήματα **Δ2**, **Δ3**, **Δ4** και **Δ5** δίνονται:

- Η συνάρτηση $F:[0,+\infty)\to R$, η οποία είναι μια παράγουσα της f στο $[0,+\infty)$ με $F(1)=0$ και
- Η συνεχής συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to R$, για την οποία ισχύουν $g(0)=0$ και $g^2(x)+1=e^{2x}-2g(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

Δ2. Να βρείτε τον τύπο της g (2 μονάδες) και να ορίσετε τη συνάρτηση $G=goF$ (3 μονάδες).

(5 μονάδες)

Δ3. Να δείξετε ότι

α. η G είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο πεδίο ορισμού της.

(4 μονάδες)

β. $G(x)\geq x-1$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$.

(2 μονάδες)

Δ4. Αν E είναι το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της F, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$, να δείξετε ότι $\mathrm{E}>1$.

(4 μονάδες)

Δ5. Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{G(x^2+1)-G(x^2)}{G(x+3)-G(x+2)}\geq e^{x+2-x^2}$$

(6 μονάδες)

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ